Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig eksamen, d. 8. december 2024

Kursusnavn: Matematik 1a (Polyteknisk grundlag) Kursusnr. 01001\01003
Eksamensvarighed: 2 timer

Hjælpemidler: Ingen elektroniske hjælpemidler

"Vægtning": Alle spørgsmål i denne eksamen vægtes ens. Denne del af eksamenen tæller 50% af hele eksamenen.

Yderligere information: Spørgsmålene er stillet først på dansk og dernæst på engelsk. Alle svar skal være motiverede, og mellemregninger skal angives i passende omfang.

The Technical University of Denmark

Written exam, the 8th of December 2024

Course name: Mathematics 1a (Polytechnical foundation) Course no. 01001\01003
Exam duration: 2 hours

Aid: No electronic aid

"Weighting": All questions in this exam are weighted equally. This part of the exam counts for 50% of the whole exam.

Additional information: The questions are posed first in Danish and then in English. All answers have to be motivated and intermediate steps need to be given to a reasonable extent.

Opgave 1

a) Beregn sandhedstabellen for følgende logiske udsagn:

$$(\neg(Q \Leftrightarrow P)) \wedge (\neg Q).$$

b) Er det logiske udsagn $(\neg(Q \Leftrightarrow P)) \wedge (\neg Q)$ logisk ækvivalent med det logiske udsagn $P \wedge (\neg Q)$?

Opgave 2

Givet polynomiet $p(Z) = 2Z^3 - 2Z^2 - 8Z - 12$ i $\mathbb{C}[Z]$. Det oplyses at 3 er rod i dette polynomium.

a) Skriv polynomiet $p(Z)$ som produkt af et polynomium af grad et og et polynomium af grad to.

b) Find samtlige rødder i $p(Z)$ i $\mathbb{C}$. Rødderne skal angives på rektangulær form.

Opgave 3

Betragt for $a \in \mathbb{C}$ følgende matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Besvar følgende spørgsmål:

a) Beregn $\mathbf{A}^2$ og $\mathbf{A}^3$.

b) Vis ved hjælp af induktion efter n at $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Opgave 4

Der gives følgende matrix i $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Find en basis for $\mathbf{B}$'s kerne.

b) Find en basis for $\mathbf{B}$'s søjlerum.

c) Betragt den lineære afbildning $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet ved $L(\mathbf{v}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$. Er den lineære afbildning L surjektiv?

Opgave 5

Lad $V = \mathbb{R}^3$ og lad

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

være den ordnede standardbasis for V. Ydermere vælges følgende ordnede basis for V:

$$\gamma = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

a) Angiv basisskiftematricen ${}_\beta[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_\gamma$.

b) Beregn basisskiftematricen ${}_\gamma[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_\beta$.

Opgave 6

Givet følgende system af førsteordens ODEs:

$$\begin{cases} f_1'(t) = f_1(t) + 2f_2(t) \\ f_2'(t) = 2f_1(t) + f_2(t) \end{cases}$$

a) Er det givne differentialligningssystem homogent eller inhomogent?

b) Beregn differentialligningenssystemets fuldstændige reelle løsning.

c) Bestem en løsning til det givne differentialligningssystem som opfylder begyndelsesbetingelserne $f_1(0) = 3$ og $f_2(0) = 5$.

EKSAMEN SLUT

Question 1

a) Determine the truth table of the following logical proposition:

$$(\neg(Q \Leftrightarrow P)) \wedge (\neg Q).$$

b) Is the logical proposition $(\neg(Q \Leftrightarrow P)) \wedge (\neg Q)$ logically equivalent to the logical proposition $P \wedge (\neg Q)$?

Question 2

Given is the polynomial $p(Z) = 2Z^3 - 2Z^2 - 8Z - 12$ in $\mathbb{C}[Z]$. It is given that 3 is a root of this polynomial.

a) Write the given polynomial $p(Z)$ as a product of a polynomial of degree one and a polynomial of degree two.

b) Find all roots of $p(Z)$ in $\mathbb{C}$. The roots should be given in rectangular form.

Question 3

Let $a \in \mathbb{C}$ be given and define the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Now answer the following questions:

a) Compute $\mathbf{A}^2$ and $\mathbf{A}^3$.

b) Show using induction on n that $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$ for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Question 4

The following matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ is given:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Compute a basis for the kernel of the given matrix $\mathbf{B}$.

b) Compute a basis for the column space of the given matrix $\mathbf{B}$.

c) Consider the linear map $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defined by $L(\mathbf{v}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$. Is the linear map L surjective?

Question 5

Let $V = \mathbb{R}^3$. Denote by

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

the ordered standard basis for V. The following ordered basis for V is chosen:

$$\gamma = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

a) Compute the change of basis matrix ${}_{\beta}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\gamma}$.

b) Compute the change of basis matrix ${}_{\gamma}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\beta}$.

Question 6

The following system of first order ODEs is given:

$$\begin{cases} f_1'(t) = f_1(t) + 2f_2(t) \\ f_2'(t) = 2f_1(t) + f_2(t) \end{cases}$$

a) Is the given system of differential equations homogeneous or inhomogeneous?

b) Determine the general real solution of the given system of differential equations.

c) Determine the solution to the given system of differential equations satisfying the initial value conditions $f_1(0) = 3$ and $f_2(0) = 5$.

END OF THE EXAM