

Danmarks Tekniske Universitet

Side 1 af 5 sider

Skriftlig eksamen, d. 24. maj 2025

Kursusnavn: Matematik 1a (Polyteknisk grundlag)
Eksamensvarighed: 2 timer

Kursusnr. 01001\01003

Hjælpemidler: Ingen elektroniske hjælpemidler

“Vægtning”: Alle spørgsmål i denne eksamen vægtes ens. Denne del af eksamen tæller 50% af hele eksamenen.

Yderligere information: Spørgsmålene er stillet først på dansk og dernæst på engelsk. Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal angives i passende omfang.

The Technical University of Denmark

Page 1 of 5 pages

Written exam, the 24th of May 2025

Course name: Mathematics 1a (Polytechnical foundation) Course no. 01001\01003
Exam duration: 2 hours

Aid: No electronic aid

“Weighting”: All questions in this exam are weighted equally. This part of the exam counts for 50% of the whole exam.

Additional information: The questions are posed first in Danish and then in English. All answers have to be motivated and intermediate steps need to be given to a reasonable extent.

Opgave 1

- a) Opstil sandhedstabellen for det logiske udsagn: $(P \vee Q \vee R) \Rightarrow Q$.
- b) Betragt følgende 3 delmængder af $\mathbb{Z}$ givet ved: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ og $C = \{3, 4, 5\}$. Bestem mængden $(A \cup B) \cap C$.

Opgave 2

Givet den binome ligning $z^3 = -i$. Angiv løsningerne til ligningen på polær form.

Opgave 3

Givet $a \in \mathbb{C}$ og matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

- a) Bestem $\mathbf{A}^2$.
- b) Vis ved hjælp af induktion efter n at $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & (2^n - 1)a^{n-1} \\ 0 & (2a)^n \end{bmatrix}$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Opgave 4

Givet følgende matrix tilhørende $\mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- a) Bestem rangen af matricen $\mathbf{B}$.
- b) Bestem kernens dimension for matricen $\mathbf{B}$.

Opgave 5

Betragt følgende lineære førsteordens differentialligningssystem:

$$\begin{cases} f_1'(t) = f_1(t) + f_2(t) \\ f_2'(t) = 2f_2(t) \end{cases}$$

-
- a) Er systemet homogent eller inhomogent?
- b) Er $(f_1(t), f_2(t)) = (e^t, e^{2t})$ en løsning til systemet?
- c) Bestem den fuldstændige reelle løsning til systemet.
- d) Bestem den løsning til systemet, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $f_1(0) = 0$ og $f_2(0) = 1$.

Opgave 6

Lad V være et reelt vektorrum bestående af reelle 2×2 matricer. Det vil sige: $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Lad β være nedenstående ordnede basis for V :

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Lad $L : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning, med afbildningsmatrix:

$${}_{\beta}[L]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Angiv dimensionen af V .
- b) Beregn $L\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right)$.
- c) Er den lineære afbildning L injektiv?

EKSAMEN SLUT

Question 1

- a) Determine the truth table of the following logical proposition: $(P \vee Q \vee R) \Rightarrow Q$.
- b) The following three subsets of $\mathbb{Z}$ are given: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ and $C = \{3, 4, 5\}$. Determine the set $(A \cup B) \cap C$.

Question 2

Given is the binomial equation $z^3 = -i$. Compute the solutions to this equation. The solutions should be given in polar form.

Question 3

Let $a \in \mathbb{C}$ be given and define the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Now answer the following questions:

- a) Compute $\mathbf{A}^2$.
- b) Show using induction on n that $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & (2^n - 1)a^{n-1} \\ 0 & (2a)^n \end{bmatrix}$ for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Question 4

The following matrix in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ is given:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- a) Compute the rank of the matrix $\mathbf{B}$.
- b) Compute the nullity of the matrix $\mathbf{B}$.

Question 5

The following system of first order ODEs is given:

$$\begin{cases} f_1'(t) = f_1(t) + f_2(t) \\ f_2'(t) = 2f_2(t) \end{cases}$$

- a) Is the given system of differential equations homogeneous or inhomogeneous?
- b) Is $(f_1(t), f_2(t)) = (e^t, e^{2t})$ a solution of the given system of differential equations?
- c) Determine the general real solution of the given system of differential equations.
- d) Determine the solution of the given system of differential equations satisfying the initial conditions $f_1(0) = 0$ and $f_2(0) = 1$.

Question 6

Let V be the real vector space consisting of all 2×2 matrices with real entries. In other words: $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$. The following ordered basis β for V is given:

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

For a linear map $L : V \rightarrow V$ the following mapping matrix is given:

$${}_{\beta}[L]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) What is the dimension of V ?
- b) Compute $L\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right)$.
- c) Is the linear map L injective?

END OF THE EXAM